

Procedimiento matematico y logico del Caso CELSIA

Autor: Diego Carrillo Jaimes

Institucion: AHP Lab

Fecha: 2026-06-11

Version: 1.0.0

1 Notacion

Se trabaja con $m = 5$ alternativas y $n = 5$ criterios. Los indices siguen la convencion $i \in \{1, \dots, m\}$ para alternativas y $j, k \in \{1, \dots, n\}$ para criterios.

$$\sum_{j=1}^n w_j = 1, \quad \sum_{i=1}^m p_{ij} = 1, \quad s_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} w_j. \quad (1)$$

Simbolo	Definicion formal
A	Matriz de comparaciones pareadas de criterios.
W	Vector de pesos de criterios normalizado; $\sum_j w_j = 1$.
V	Matriz de valores tecnicos crudos de alternativas por criterio.
P	Matriz de prioridades normalizadas por criterio.
S	Vector de puntajes globales, calculado como $S = PW$.
λ_{\max}	Mayor autovalor de A .
CI	Indice de consistencia de Saaty.
RI	Indice aleatorio de Saaty para el orden n .
CR	Razon de consistencia, $CR = CI/RI$.
ρ	Coficiente de Spearman entre el ranking base y el perturbado.
δ	Perturbacion relativa aplicada a un peso de criterio.
MD	Margen de decision entre el primer y el segundo puntaje global.

Table 1: Notacion empleada en el documento.

Todas las cantidades numericas se presentan con suficiente precision para verificar a mano los resultados del caso; las tablas resumen se redondean a cuatro decimales, mientras que las sustituciones intermedias mantienen seis decimales cuando es necesario.

2 Fundamentos AHP (Saaty)

La matriz de comparaciones pareadas de criterios se representa como

$$A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad a_{ii} = 1, \quad a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}. \quad (2)$$

En consistencia perfecta se cumple la transitividad multiplicativa

$$a_{ij} a_{jk} = a_{ik}, \quad a_{ij} = \frac{w_i}{w_j}. \quad (3)$$

Escala	Semantica
1	Igual importancia
2	Valor intermedio entre 1 y 3
3	Importancia moderada
4	Valor intermedio entre 3 y 5
5	Importancia fuerte
6	Valor intermedio entre 5 y 7
7	Importancia muy fuerte
8	Valor intermedio entre 7 y 9
9	Importancia extrema

Table 2: Escala fundamental 1–9 de Saaty (1980).

Teorema 1 (Perron–Frobenius aplicado a A). *Si A es positiva entrada a entrada, entonces existe un autovalor dominante $\lambda_{\max} > 0$ asociado a un autovector estrictamente positivo, unico salvo escala. Por tanto, en AHP la prioridad principal puede tomarse como el autovector positivo normalizado.*

La formulacion eigenvectorial queda dada por

$$Aw = \lambda_{\max}w, \quad w \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n w_i = 1. \quad (4)$$

Si A es perfectamente consistente y $a_{ij} = w_i/w_j$, entonces la fila i satisface

$$(Aw)_i = \sum_{j=1}^n \frac{w_i}{w_j} w_j = \sum_{j=1}^n w_i = nw_i, \quad (5)$$

por lo que $\lambda_{\max} = n$. En aplicaciones reales, la inconsistencia desplaza λ_{\max} por encima de n y el autovector principal se interpreta como la mejor aproximacion positiva a los juicios emitidos. Como aproximacion alternativa puede usarse la media geometrica por filas. Definiendo

$$g_i = \left(\prod_{j=1}^n a_{ij} \right)^{1/n}, \quad (6)$$

y sustituyendo la forma consistente $a_{ij} = w_i/w_j$, se obtiene

$$g_i = \left(\prod_{j=1}^n \frac{w_i}{w_j} \right)^{1/n} = \left(\frac{w_i^n}{\prod_{j=1}^n w_j} \right)^{1/n} = \frac{w_i}{\left(\prod_{j=1}^n w_j \right)^{1/n}} = c w_i, \quad (7)$$

con una constante comun $c > 0$; al normalizar g , se recupera exactamente W . El exceso del autovalor dominante respecto del caso consistente define el indice de consistencia

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}. \quad (8)$$

La division por $(n - 1)$ interpreta el exceso espectral medio por grado de libertad de comparacion. Finalmente, la razon de consistencia es

$$CR = \frac{CI}{RI}, \quad (9)$$

donde RI es el indice aleatorio de Saaty para matrices del mismo orden.

n	RI
1	0.00
2	0.00
3	0.58
4	0.90
5	1.12
6	1.24
7	1.32
8	1.41
9	1.45
10	1.49

Table 3: Valores del indice aleatorio RI para matrices de orden 1 a 10.

El criterio clasico de aceptacion es $CR < 0.10$; cuando esto ocurre, la inconsistencia observada se considera tolerable para continuar con la sintesis jerarquica.

3 Matriz $A_{5 \times 5}$ del caso

La matriz original de juicios expertos no fue portada al backend. En consecuencia, el respaldo documental reconstruye la matriz pareada a partir del vector canonico W , imponiendo la relacion consistente $a_{ij} = w_i/w_j$.

$$a_{12} = \frac{0.5128}{0.2615} = 1.9610, \quad (10)$$

$$a_{21} = \frac{0.2615}{0.5128} = 0.5099, \quad (11)$$

$$a_{15} = \frac{0.5128}{0.0333} = 15.3994, \quad (12)$$

$$a_{54} = \frac{0.0333}{0.0634} = 0.5252. \quad (13)$$

La matriz completa, en el orden $(C1, \dots, C5)$, es

$$A = \begin{bmatrix} 1.0000 & 1.9610 & 3.9752 & 8.0883 & 15.3994 \\ 0.5099 & 1.0000 & 2.0271 & 4.1246 & 7.8529 \\ 0.2516 & 0.4933 & 1.0000 & 2.0347 & 3.8739 \\ 0.1236 & 0.2424 & 0.4915 & 1.0000 & 1.9039 \\ 0.0649 & 0.1273 & 0.2581 & 0.5252 & 1.0000 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

	C1	C2	C3	C4	C5
C1	1.0000	1.9610	3.9752	8.0883	15.3994
C2	0.5099	1.0000	2.0271	4.1246	7.8529
C3	0.2516	0.4933	1.0000	2.0347	3.8739
C4	0.1236	0.2424	0.4915	1.0000	1.9039
C5	0.0649	0.1273	0.2581	0.5252	1.0000

Table 4: Matriz A reconstruida desde el vector canonico de pesos.

Aplicando `numpy.linalg.eig` a la matriz (14), el espectro real es

Indice	Autovalor real
1	5.0000000000
2	0.0000000000
3	0.0000000000
4	0.0000000000
5	-0.0000000000

Table 5: Autovalores reales de la matriz reconstruida.

El autovalor dominante es $\lambda_{\max} = 5.0000000000$, que coincide con $n = 5$ salvo error de redondeo numerico. Una iteracion de potencia desde el vector uniforme basta para recuperar W porque la matriz es consistente por construccion.

$$x^{(0)} = [0.2000 \quad 0.2000 \quad 0.2000 \quad 0.2000 \quad 0.2000], \quad (15)$$

$$Ax^{(0)} = [6.0848 \quad 3.1029 \quad 1.5307 \quad 0.7523 \quad 0.3951]. \quad (16)$$

$$x^{(1)} = \frac{Ax^{(0)}}{\mathbf{1}^\top Ax^{(0)}} \quad (17)$$

$$= [0.5128 \quad 0.2615 \quad 0.1290 \quad 0.0634 \quad 0.0333]. \quad (18)$$

k	C1	C2	C3	C4	C5
0	0.2000	0.2000	0.2000	0.2000	0.2000
1	0.5128	0.2615	0.1290	0.0634	0.0333
2	0.5128	0.2615	0.1290	0.0634	0.0333
3	0.5128	0.2615	0.1290	0.0634	0.0333

Table 6: Iteraciones normalizadas del metodo de potencia.

Las medidas de consistencia se obtienen sustituyendo numericamente los resultados anteriores:

$$CI = \frac{5.0000000000 - 5}{5 - 1} = 0.0000000000, \quad (19)$$

$$RI = 1.12, \quad (20)$$

$$CR = \frac{0.0000000000}{1.12} = 0.0000000000. \quad (21)$$

Interpretacion breve: la reconstruccion produce $CR \rightarrow 0$ porque se impuso exactamente la estructura consistente de la ecuacion (3). Esto valida la coherencia algebraica del vector W pero no sustituye la verificacion de consistencia de la matriz original de juicios expertos, que seria el objeto metodologicamente correcto si dicha matriz estuviera disponible.

4 Vector W

El autovector principal entregado por `numpy.linalg.eig` es proporcional al vector canonico.

$$\tilde{w} = [0.862958 \quad 0.440061 \quad 0.217086 \quad 0.106692 \quad 0.056038]. \quad (22)$$

Al normalizar por la suma de sus componentes se obtiene

$$W = \frac{\tilde{w}}{\sum_i \tilde{w}_i} \quad (23)$$

$$= [0.5128 \quad 0.2615 \quad 0.1290 \quad 0.0634 \quad 0.0333]. \quad (24)$$

El metodo de media geometrica por filas coincide con el mismo resultado porque la matriz reconstruida es perfectamente consistente.

$$g = [3.957669 \quad 2.018195 \quad 0.995591 \quad 0.489306 \quad 0.257001], \quad (25)$$

$$\frac{g}{\sum_i g_i} = [0.5128 \quad 0.2615 \quad 0.1290 \quad 0.0634 \quad 0.0333]. \quad (26)$$

Criterio	Nombre	w_k	$w_k \times 100$
C1	Interoperabilidad	0.5128	51.28 %
C2	Frecuencia	0.2615	26.15 %
C3	Ciberseguridad	0.1290	12.90 %
C4	Hardware	0.0634	6.34 %
C5	Marca	0.0333	3.33 %

Table 7: Pesos canonicos de criterios ordenados de mayor a menor.

Interpretacion breve: los dos primeros criterios concentran 77.43% del peso total, por lo que el comportamiento del ranking queda dominado por interoperabilidad y frecuencia de muestreo.

5 Matriz de alternativas V (5 criterios \times 5 MUs)

La matriz V contiene valores crudos ya llevados a una escala tecnica comun de 0 a 5 puntos. En este caso no se comparan magnitudes fisicas heterogeneas directamente; se sintetizan calificaciones tecnicas adimensionales, por lo que la unidad reportada es *puntos*.

MU	Alternativa	C1	C2	C3	C4	C5
MU1	Siemens SIPROTEC	5.00	4.75	5.00	5.00	5.00
MU2	SEL-401	3.50	5.00	4.00	2.00	4.70
MU3	ABB REX640	4.25	4.50	4.00	4.00	5.00
MU4	Hitachi SMU615	4.00	4.25	3.00	3.00	5.00
MU5	GE MiCOM	2.50	3.35	2.00	2.00	4.70

Table 8: Valores crudos V utilizados en la sintesis del caso.

Criterio	Nombre	Dir.	Unidad	Justificacion
C1	Interoperabilidad	max	puntaje tecnico (0-5)	Mayor compatibilidad e integracion IEC 61850 implica mejor desempeno.
C2	Frecuencia	max	puntaje tecnico (0-5)	El dato ya esta expresado como puntaje de conveniencia tecnica; mayor puntaje significa mejor respuesta funcional.
C3	Ciberseguridad	max	puntaje tecnico (0-5)	Mayor robustez de mecanismos y cumplimiento de controles es preferible.
C4	Hardware	max	puntaje tecnico (0-5)	Mayor robustez y capacidad instalada mejoran la evaluacion.
C5	Marca	max	puntaje tecnico (0-5)	Mayor experiencia y soporte percibido elevan la conveniencia tecnica.

Table 9: Direccion de optimizacion y lectura tecnica de cada criterio.

Interpretacion breve: todos los criterios se modelan como de maximizacion porque los datos de entrada ya son puntajes de conveniencia tecnica. Por ejemplo, el criterio de frecuencia no entra como latencia bruta a minimizar, sino como calificacion agregada donde un valor mayor significa mejor desempeno tecnico para la decision.

6 Normalizacion distributiva

Para criterios de maximizacion se adopta la normalizacion distributiva

$$p_{ij} = \frac{v_{ij}}{\sum_{k=1}^m v_{kj}}, \quad (27)$$

mientras que para criterios de minimizacion se usa

$$p_{ij} = \frac{1/v_{ij}}{\sum_{k=1}^m 1/v_{kj}}. \quad (28)$$

En el caso CELSIA todos los criterios son de maximizacion, por lo que solo se requiere la ecuacion (27). Los denominadores columna a columna son

$$D_1 = \sum_i v_{i1} = 5.00 + 3.50 + 4.25 + 4.00 + 2.50 = 19.2500 \quad (29)$$

$$D_2 = \sum_i v_{i2} = 4.75 + 5.00 + 4.50 + 4.25 + 3.35 = 21.8500 \quad (30)$$

$$D_3 = \sum_i v_{i3} = 5.00 + 4.00 + 4.00 + 3.00 + 2.00 = 18.0000 \quad (31)$$

$$D_4 = \sum_i v_{i4} = 5.00 + 2.00 + 4.00 + 3.00 + 2.00 = 16.0000 \quad (32)$$

$$D_5 = \sum_i v_{i5} = 5.00 + 4.70 + 5.00 + 5.00 + 4.70 = 24.4000 \quad (33)$$

Sustituyendo los valores reales del caso, las cinco columnas normalizadas quedan

$$P_{\bullet 1} = \frac{1}{19.2500} \begin{bmatrix} 5.00 \\ 3.50 \\ 4.25 \\ 4.00 \\ 2.50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2597 \\ 0.1818 \\ 0.2208 \\ 0.2078 \\ 0.1299 \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$P_{\bullet 2} = \frac{1}{21.8500} \begin{bmatrix} 4.75 \\ 5.00 \\ 4.50 \\ 4.25 \\ 3.35 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2174 \\ 0.2288 \\ 0.2059 \\ 0.1945 \\ 0.1533 \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$P_{\bullet 3} = \frac{1}{18.0000} \begin{bmatrix} 5.00 \\ 4.00 \\ 4.00 \\ 3.00 \\ 2.00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2778 \\ 0.2222 \\ 0.2222 \\ 0.1667 \\ 0.1111 \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$P_{\bullet 4} = \frac{1}{16.0000} \begin{bmatrix} 5.00 \\ 2.00 \\ 4.00 \\ 3.00 \\ 2.00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3125 \\ 0.1250 \\ 0.2500 \\ 0.1875 \\ 0.1250 \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$P_{\bullet 5} = \frac{1}{24.4000} \begin{bmatrix} 5.00 \\ 4.70 \\ 5.00 \\ 5.00 \\ 4.70 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2049 \\ 0.1926 \\ 0.2049 \\ 0.2049 \\ 0.1926 \end{bmatrix} \quad (38)$$

y por tanto la matriz completa de prioridades es

$$P = \begin{bmatrix} 0.2597 & 0.2174 & 0.2778 & 0.3125 & 0.2049 \\ 0.1818 & 0.2288 & 0.2222 & 0.1250 & 0.1926 \\ 0.2208 & 0.2059 & 0.2222 & 0.2500 & 0.2049 \\ 0.2078 & 0.1945 & 0.1667 & 0.1875 & 0.2049 \\ 0.1299 & 0.1533 & 0.1111 & 0.1250 & 0.1926 \end{bmatrix}. \quad (39)$$

MU	Alternativa	C1	C2	C3	C4	C5
MU1	Siemens SIPROTEC	0.2597	0.2174	0.2778	0.3125	0.2049
MU2	SEL-401	0.1818	0.2288	0.2222	0.1250	0.1926
MU3	ABB REX640	0.2208	0.2059	0.2222	0.2500	0.2049
MU4	Hitachi SMU615	0.2078	0.1945	0.1667	0.1875	0.2049
MU5	GE MiCOM	0.1299	0.1533	0.1111	0.1250	0.1926

Table 10: Matriz P de prioridades normalizadas por criterio.

La eleccion distributiva se justifica formalmente por dos propiedades inmediatas. Primero, cada columna suma uno: $\sum_i p_{ij} = 1$, lo que hace compatible a P con la interpretacion probabilistica del

peso w_j . Segundo, es invariante a un reescalamiento positivo por criterio:

$$\frac{\alpha_j v_{ij}}{\sum_k \alpha_j v_{kj}} = \frac{v_{ij}}{\sum_k v_{kj}}, \quad \alpha_j > 0. \quad (40)$$

En contraste, una normalizacion tipo max/min queda anclada en un extremo observado y no produce columnas que sumen uno. Para la sintesis aditiva $S = PW$, la forma distributiva mantiene una lectura mas limpia: cada criterio reparte exactamente su peso total entre las alternativas.

7 Calculo de puntajes $S = P \cdot W$

La sintesis global se calcula por producto matricial

$$S = PW, \quad s_i = \sum_{j=1}^5 p_{ij} w_j. \quad (41)$$

Desarrollando explicitamente cada alternativa en el orden $(C1, \dots, C5)$ se obtiene

$$s_{MU1} = (0.259740)(0.5128) + (0.217391)(0.2615) + (0.277778)(0.1290) \quad (42)$$

$$(0.312500)(0.0634) + (0.204918)(0.0333) \quad (43)$$

$$= 0.133195 + 0.056848 + 0.035833 \quad (44)$$

$$0.019813 + 0.006824 \quad (45)$$

$$= 0.252512 \approx 0.2525. \quad (46)$$

$$s_{MU2} = (0.181818)(0.5128) + (0.228833)(0.2615) + (0.222222)(0.1290) \quad (47)$$

$$(0.125000)(0.0634) + (0.192623)(0.0333) \quad (48)$$

$$= 0.093236 + 0.059840 + 0.028667 \quad (49)$$

$$0.007925 + 0.006414 \quad (50)$$

$$= 0.196082 \approx 0.1961. \quad (51)$$

$$s_{MU3} = (0.220779)(0.5128) + (0.205950)(0.2615) + (0.222222)(0.1290) \quad (52)$$

$$(0.250000)(0.0634) + (0.204918)(0.0333) \quad (53)$$

$$= 0.113216 + 0.053856 + 0.028667 \quad (54)$$

$$0.015850 + 0.006824 \quad (55)$$

$$= 0.218412 \approx 0.2184. \quad (56)$$

$$s_{MU4} = (0.207792)(0.5128) + (0.194508)(0.2615) + (0.166667)(0.1290) \quad (57)$$

$$(0.187500)(0.0634) + (0.204918)(0.0333) \quad (58)$$

$$= 0.106556 + 0.050864 + 0.021500 \quad (59)$$

$$0.011887 + 0.006824 \quad (60)$$

$$= 0.197631 \approx 0.1976. \quad (61)$$

$$s_{MU5} = (0.129870)(0.5128) + (0.153318)(0.2615) + (0.111111)(0.1290) \quad (62)$$

$$(0.125000)(0.0634) + (0.192623)(0.0333) \quad (63)$$

$$= 0.066597 + 0.040093 + 0.014333 \quad (64)$$

$$0.007925 + 0.006414 \quad (65)$$

$$= 0.135363 \approx 0.1354. \quad (66)$$

Pos.	MU	Alternativa	Puntaje	Porcentaje
1	MU1	Siemens SIPROTEC	0.2525	25.25 %
2	MU3	ABB REX640	0.2184	21.84 %
3	MU4	Hitachi SMU615	0.1976	19.76 %
4	MU2	SEL-401	0.1961	19.61 %
5	MU5	GE MiCOM	0.1354	13.54 %

Table 11: Ranking final reproducido a partir de $S = PW$.

La suma de puntajes queda verificada de dos formas. Algebraicamente,

$$\sum_{i=1}^m s_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{ij} w_j \quad (67)$$

$$= \sum_{j=1}^n w_j \sum_{i=1}^m p_{ij} \quad (68)$$

$$= \sum_{j=1}^n w_j = 1. \quad (69)$$

Numericamente,

$$0.252512 + 0.196082 + 0.218412 \quad (70)$$

$$+ 0.197631 + 0.135363 = 1.000000. \quad (71)$$

Interpretacion breve: Siemens SIPROTEC lidera porque combina el mayor puntaje en interoperabilidad, ciberseguridad y hardware con un desempeño fuerte en frecuencia; como $C1$ y $C2$ concentran la mayor parte de W , esa combinacion domina la agregacion global.

8 Margen de decision MD

Por definicion, el margen de decision es la diferencia entre el primer y el segundo puntaje.

$$MD = s_{(1)} - s_{(2)} = 0.252512 - 0.218412 = 0.034100 \approx 0.0341. \quad (72)$$

Interpretacion breve: el lider mantiene una ventaja absoluta de aproximadamente 0.0341 puntos AHP sobre ABB. Bajo los ocho escenarios OAT, ese margen permanece positivo y se mueve dentro del intervalo $[0.0325, 0.0357]$, es decir, una variacion relativa acotada de aproximadamente $\pm 4.71\%$ respecto del valor base. Empiricamente, esto respalda la robustez de la alternativa ganadora.

9 Analisis de sensibilidad OAT (one-at-a-time)

El esquema OAT modifica un unico peso w_k y redistribuye proporcionalmente el resto, de manera que la suma total permanezca unitaria.

$$w'_k = w_k(1 + \delta), \quad (73)$$

$$w'_j = w_j \frac{1 - w'_k}{1 - w_k}, \quad j \neq k. \quad (74)$$

La derivacion es directa: si todos los pesos no perturbados comparten el mismo factor $\alpha = (1 - w'_k)/(1 - w_k)$, entonces

$$\sum_{j \neq k} w'_j = \alpha \sum_{j \neq k} w_j = \frac{1 - w'_k}{1 - w_k} (1 - w_k) = 1 - w'_k, \quad (75)$$

y por tanto $\sum_j w'_j = w'_k + (1 - w'_k) = 1$. Las restricciones de admisibilidad son

$$\delta > -1, \quad w'_k < 1 \iff \delta < \frac{1}{w_k} - 1. \quad (76)$$

Para este caso, los limites superiores relevantes son $\delta < 0.9501$ en $C1$ y $\delta < 2.8241$ en $C2$. Ejemplo numerico con +10% sobre $C1$:

$$w'_1 = 0.5128(1 + 0.10) = 0.56408, \quad (77)$$

$$\alpha = \frac{1 - 0.56408}{1 - 0.5128} = 0.894745, \quad (78)$$

$$w'_2 = 0.2615\alpha = 0.233976. \quad (79)$$

La estabilidad del ranking se mide con Spearman

$$\rho = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n d_i^2}{n(n^2 - 1)}, \quad (80)$$

asignando rangos promediados si existieran empates. En el escenario -10% sobre $C1$ los rangos base son (1, 4, 2, 3, 5) y los rangos perturbados son (1, 3, 2, 4, 5); por tanto

$$\sum d_i^2 = 0^2 + 1^2 + 0^2 + (-1)^2 + 0^2 = 2, \quad \rho = 1 - \frac{6 \cdot 2}{5(5^2 - 1)} = 0.9. \quad (81)$$

Los ocho escenarios canonicos quedan entonces:

Escenario +10 % C1. Perturbando el criterio Interoperabilidad, el nuevo vector de pesos es

$$W' = [0.5641 \quad 0.2340 \quad 0.1154 \quad 0.0567 \quad 0.0298], \quad (82)$$

y la sintesis global se actualiza a

$$S' = [0.2533 \quad 0.1946 \quad 0.2187 \quad 0.1987 \quad 0.1348]. \quad (83)$$

El ranking resultante es Siemens SIPROTEC > ABB REX640 > Hitachi SMU615 > SEL-401 > GE MiCOM.

$$MD' = 0.034612, \quad \Delta MD = +0.000512, \quad \rho = 1.0000. \quad (84)$$

Escenario -10 % C1. Perturbando el criterio Interoperabilidad, el nuevo vector de pesos es

$$W' = [0.4615 \quad 0.2890 \quad 0.1426 \quad 0.0701 \quad 0.0368], \quad (85)$$

y la síntesis global se actualiza a

$$S' = [0.2518 \quad 0.1976 \quad 0.2182 \quad 0.1966 \quad 0.1359]. \quad (86)$$

El ranking resultante es Siemens SIPROTEC > ABB REX640 > SEL-401 > Hitachi SMU615 > GE MiCOM.

$$MD' = 0.033589, \quad \Delta MD = -0.000512, \quad \rho = 0.9000. \quad (87)$$

Escenario +10 % C2. Perturbando el criterio Frecuencia, el nuevo vector de pesos es

$$W' = [0.4946 \quad 0.2877 \quad 0.1244 \quad 0.0612 \quad 0.0321], \quad (88)$$

y la síntesis global se actualiza a

$$S' = [0.2513 \quad 0.1972 \quad 0.2180 \quad 0.1975 \quad 0.1360]. \quad (89)$$

El ranking resultante es Siemens SIPROTEC > ABB REX640 > Hitachi SMU615 > SEL-401 > GE MiCOM.

$$MD' = 0.033298, \quad \Delta MD = -0.000802, \quad \rho = 1.0000. \quad (90)$$

Escenario -10 % C2. Perturbando el criterio Frecuencia, el nuevo vector de pesos es

$$W' = [0.5310 \quad 0.2354 \quad 0.1336 \quad 0.0656 \quad 0.0345], \quad (91)$$

y la síntesis global se actualiza a

$$S' = [0.2538 \quad 0.1949 \quad 0.2189 \quad 0.1977 \quad 0.1347]. \quad (92)$$

El ranking resultante es Siemens SIPROTEC > ABB REX640 > Hitachi SMU615 > SEL-401 > GE MiCOM.

$$MD' = 0.034903, \quad \Delta MD = +0.000802, \quad \rho = 1.0000. \quad (93)$$

Escenario +20 % C1. Perturbando el criterio Interoperabilidad, el nuevo vector de pesos es

$$W' = [0.6154 \quad 0.2065 \quad 0.1018 \quad 0.0501 \quad 0.0263], \quad (94)$$

y la síntesis global se actualiza a

$$S' = [0.2540 \quad 0.1931 \quad 0.2189 \quad 0.1998 \quad 0.1342]. \quad (95)$$

El ranking resultante es Siemens SIPROTEC > ABB REX640 > Hitachi SMU615 > SEL-401 > GE MiCOM.

$$MD' = 0.035124, \quad \Delta MD = +0.001023, \quad \rho = 1.0000. \quad (96)$$

Escenario -20 % C1. Perturbando el criterio Interoperabilidad, el nuevo vector de pesos es

$$W' = [0.4102 \quad 0.3165 \quad 0.1562 \quad 0.0767 \quad 0.0403], \quad (97)$$

y la síntesis global se actualiza a

$$S' = [0.2510 \quad 0.1991 \quad 0.2179 \quad 0.1955 \quad 0.1365]. \quad (98)$$

El ranking resultante es Siemens SIPROTEC > ABB REX640 > SEL-401 > Hitachi SMU615 > GE MiCOM.

$$MD' = 0.033077, \quad \Delta MD = -0.001023, \quad \rho = 0.9000. \quad (99)$$

Escenario +20 % C2. Perturbando el criterio Frecuencia, el nuevo vector de pesos es

$$W' = [0.4765 \quad 0.3138 \quad 0.1199 \quad 0.0589 \quad 0.0309], \quad (100)$$

y la síntesis global se actualiza a

$$S' = [0.2500 \quad 0.1984 \quad 0.2175 \quad 0.1974 \quad 0.1366]. \quad (101)$$

El ranking resultante es Siemens SIPROTEC > ABB REX640 > SEL-401 > Hitachi SMU615 > GE MiCOM.

$$MD' = 0.032496, \quad \Delta MD = -0.001605, \quad \rho = 0.9000. \quad (102)$$

Escenario -20 % C2. Perturbando el criterio Frecuencia, el nuevo vector de pesos es

$$W' = [0.5491 \quad 0.2092 \quad 0.1381 \quad 0.0679 \quad 0.0357], \quad (103)$$

y la síntesis global se actualiza a

$$S' = [0.2550 \quad 0.1938 \quad 0.2193 \quad 0.1979 \quad 0.1341]. \quad (104)$$

El ranking resultante es Siemens SIPROTEC > ABB REX640 > Hitachi SMU615 > SEL-401 > GE MiCOM.

$$MD' = 0.035705, \quad \Delta MD = +0.001605, \quad \rho = 1.0000. \quad (105)$$

10 Umbrales críticos δ^*

Para cada par (g, p) y criterio k , el problema consiste en hallar el valor δ^* tal que $s_g(\delta^*) = s_p(\delta^*)$. Equivalentemente, se busca una raíz de $f_{g,p,k}(\delta)$ en el intervalo admisible

$$\delta \in \left[-0.999, \frac{1}{w_k} - 1 - \varepsilon \right], \quad \varepsilon = 10^{-6}. \quad (106)$$

Si $f(\delta_{\min})$ y $f(\delta_{\max})$ tienen signos opuestos, la bisección garantiza una raíz.

Cruce	Criterio	δ^*	$f(\delta_{\min})$	$f(\delta_{\max})$
SEL supera a Hitachi por C1 (Interop.)	Interoperabilidad	-6.02 %	0.024134	-0.025974
SEL supera a ABB por C2 (Frec.)	Frecuencia	+139.48 %	-0.038323	0.022883

Table 12: Casos con cruce alcanzable dentro del intervalo admisible.

Cruce	Criterio	$f(\delta_{\min})$	$f(\delta_{\max})$	Conclusion
SEL supera a ABB por C1 (Interop.)	Interoperabilidad	-0.004842	-0.038961	Sin cambio de signo; no hay cruce.
ABB supera a Siemens por C1 (Interop.)	Interoperabilidad	-0.028989	-0.038961	Sin cambio de signo; no hay cruce.
ABB supera a Siemens por C2 (Frec.)	Frecuencia	-0.042116	-0.011442	Sin cambio de signo; no hay cruce.

Table 13: Casos sin cruce alcanzable dentro del intervalo admisible.

SEL supera a Hitachi por C1 (Interop.). Se busca la raiz de

$$f(\delta) = s_g(\delta) - s_p(\delta) = 0, \quad (107)$$

aqui g denota SEL-401 y p denota Hitachi SMU615. mediante biseccion en el intervalo admisible

$$[\delta_{\min}, \delta_{\max}] = [-0.999000, 0.950077], \quad (108)$$

con signos de arranque

$$f(-0.999) = 0.024134, \quad f(0.9501) = -0.025974. \quad (109)$$

It.	a	b	m	$f(a)$	$f(m)$	$f(b)$
1	-0.999000	0.950077	-0.024461	0.024134	-0.000920	-0.025974
2	-0.999000	-0.024461	-0.511731	0.024134	0.011607	-0.000920
3	-0.511731	-0.024461	-0.268096	0.011607	0.005344	-0.000920
4	-0.268096	-0.024461	-0.146279	0.005344	0.002212	-0.000920
5	-0.146279	-0.024461	-0.085370	0.002212	0.000646	-0.000920
6	-0.085370	-0.024461	-0.054916	0.000646	-0.000137	-0.000920
7	-0.085370	-0.054916	-0.070143	0.000646	0.000255	-0.000137
8	-0.070143	-0.054916	-0.062529	0.000255	0.000059	-0.000137
9	-0.062529	-0.054916	-0.058723	0.000059	-0.000039	-0.000137
10	-0.062529	-0.058723	-0.060626	0.000059	0.000010	-0.000039

Table 14: Primeras iteraciones de biseccion para SEL supera a Hitachi por C1 (Interop.).

Tras 33 iteraciones, el cruce converge a

$$\delta^* = -0.060243 \approx -6.02\%. \quad (110)$$

Interpretacion breve: ese es el cambio minimo de peso requerido para igualar ambos puntajes; mas alla de ese valor, el orden relativo se invierte.

SEL supera a ABB por C2 (Frec.). Se busca la raiz de

$$f(\delta) = s_g(\delta) - s_p(\delta) = 0, \quad (111)$$

aqui g denota SEL-401 y p denota ABB REX640. mediante biseccion en el intervalo admisible

$$[\delta_{\min}, \delta_{\max}] = [-0.999000, 2.824091], \quad (112)$$

con signos de arranque

$$f(-0.999) = -0.038323, \quad f(2.8241) = 0.022883. \quad (113)$$

It.	a	b	m	$f(a)$	$f(m)$	$f(b)$
1	-0.999000	2.824091	0.912545	-0.038323	-0.007720	0.022883
2	0.912545	2.824091	1.868318	-0.007720	0.007582	0.022883
3	0.912545	1.868318	1.390432	-0.007720	-0.000069	0.007582
4	1.390432	1.868318	1.629375	-0.000069	0.003756	0.007582
5	1.390432	1.629375	1.509903	-0.000069	0.001843	0.003756
6	1.390432	1.509903	1.450168	-0.000069	0.000887	0.001843
7	1.390432	1.450168	1.420300	-0.000069	0.000409	0.000887
8	1.390432	1.420300	1.405366	-0.000069	0.000170	0.000409
9	1.390432	1.405366	1.397899	-0.000069	0.000050	0.000170
10	1.390432	1.397899	1.394165	-0.000069	-0.000009	0.000050

Table 15: Primeras iteraciones de biseccion para SEL supera a ABB por C2 (Frec.).

Tras 33 iteraciones, el cruce converge a

$$\delta^* = 1.394755 \approx +139.48\%. \quad (114)$$

Interpretacion breve: ese es el cambio minimo de peso requerido para igualar ambos puntajes; mas alla de ese valor, el orden relativo se invierte.

11 Tornado

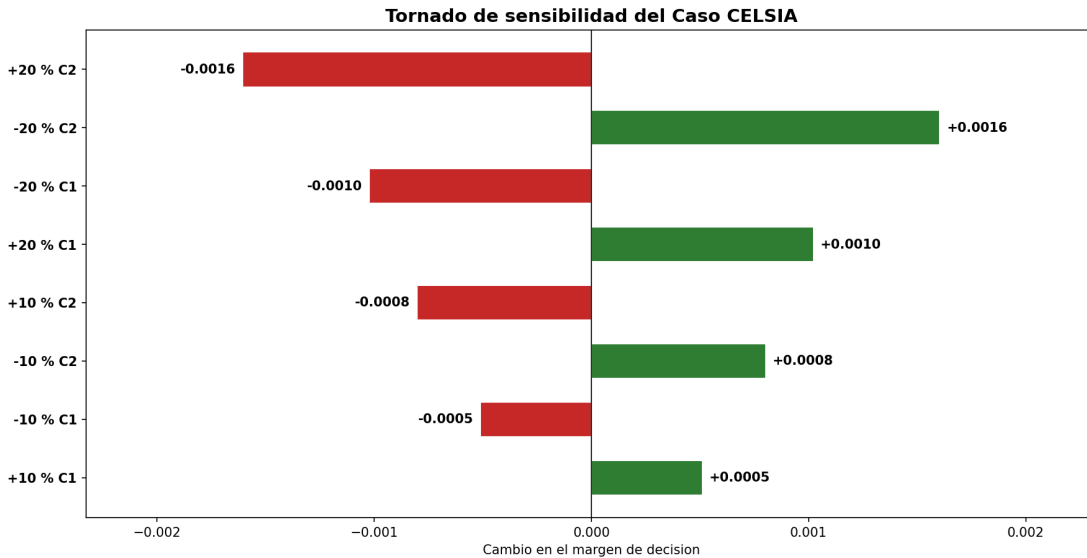


Figure 1: Tornado de sensibilidad del margen de decision frente a los ocho escenarios OAT.

Lectura tecnica: el mayor desplazamiento absoluto del margen lider–segundo lugar corresponde a +20 % C2, con $\Delta MD = -0.001605$. Esto indica que, si la metrica observada es el ancho del margen Siemens–ABB, el criterio de frecuencia genera la deformacion mas visible. Sin embargo, si la metrica es la aparicion de cruces en posiciones intermedias, interoperabilidad es mas critica: una reduccion de apenas 6.02% en C1 ya hace que SEL supere a Hitachi. El margen global sigue siendo ancho y estable, pues nunca cambia de signo y permanece dentro de $[0.0325, 0.0357]$.

12 Conclusiones

La decision recomendada es **Siemens SIPROTEC**. El ranking base reproducido a partir de $S = PW$ es Siemens (0.2525), ABB (0.2184), Hitachi (0.1976), SEL (0.1961) y GE (0.1354), en plena coherencia con la Tabla 4-16 del caso. La robustez cuantitativa es alta. El coeficiente medio de Spearman en los ocho escenarios es 0.9625; el minimo observado es 0.9000 y el maximo es 1.0000. El margen de decision se mantiene positivo en todo el rango evaluado, variando entre 0.0325 y 0.0357. Los cruces observados se concentran en la zona media del ranking: -10 % C1: SEL-401 sobre Hitachi SMU615; -20 % C1: SEL-401 sobre Hitachi SMU615; +20 % C2: SEL-401 sobre Hitachi SMU615. El umbral mas cercano es SEL sobre Hitachi por interoperabilidad, con $\delta^* \approx -6.02\%$; en cambio, desplazar a ABB mediante cambios unidimensionales en frecuencia exige aproximadamente +139.48%, fuera de un rango razonable de incertidumbre. Limitaciones metodologicas: la matriz A aqui presentada fue reconstruida desde W , de modo que el CR reportado certifica consistencia algebraica del vector de pesos, no consistencia empírica de la matriz original de juicios. Ademas, la sensibilidad analizada actua sobre W y no sobre los juicios pareados originales ni sobre la matriz de desempeno V .

13 Anexo de reproducibilidad

Pos.	MU	Alternativa	Calculado	Tabla 4-16	Δ
1	MU1	Siemens SIPROTEC	0.252512	0.2525	+0.000012
2	MU3	ABB REX640	0.218412	0.2184	+0.000012
3	MU4	Hitachi SMU615	0.197631	0.1976	+0.000031
4	MU2	SEL-401	0.196082	0.1961	-0.000018
5	MU5	GE MiCOM	0.135363	0.1354	-0.000037

Table 16: Comparacion entre los puntajes calculados y los valores publicados en la Tabla 4-16.

Chequeo	Valor
Error maximo en puntajes	0.000037
Error en margen base	0.000000
Error maximo en escenarios	0.000000
Error maximo en umbrales	0.000000

Table 17: Errores absolutos maximos frente a las referencias canonicas del caso.

Componente	Version
Python	3.12.3
numpy	1.26.4
pdfflatex	pdfTeX 3.141592653-2.6-1.40.25 (TeX Live 2023/Debian)

Table 18: Entorno minimo de reproducibilidad.

Todas las diferencias numericas relevantes permanecen dentro de la tolerancia de 10^{-4} exigida por el backend del caso.